

# Optimización Multiobjetivo utilizando un Algoritmo Adaptativo de Grover basado en un Oráculo Efectivo

Fogel Gerardo, Barán Benjamín, Villagra Marcos

[gerardofogel@gmail.com.py](mailto:gerardofogel@gmail.com.py), [bbaran@pol.una.py](mailto:bbaran@pol.una.py), [mwillagra@pol.una.py](mailto:mwillagra@pol.una.py)

Universidad Nacional de Asunción – Facultad Politécnica, San Lorenzo. PARAGUAY

Programa de incentivos para la formación de docentes – investigadores – Convocatoria 2015

## RESUMEN

Los Problemas de Optimización resultan especialmente relevantes para diversas áreas de las Ciencias y de la Ingeniería. El presente trabajo aborda dicha problemática en el contexto de la Computación Cuántica. La Computación Cuántica es un paradigma basado en las propias leyes de la física cuántica y los fenómenos de superposición, interferencia y entrelazamiento. Con el desarrollo de la Computación Cuántica han surgido nuevos algoritmos que han demostrado ser más eficientes que los algoritmos clásicos. Tal es el caso del Algoritmo de búsqueda de Grover, que permite encontrar un elemento específico en un conjunto de  $N$  elementos con una complejidad  $O(\sqrt{N})$ . La aplicación del algoritmo de Grover a problemas de optimización ha resultado natural, y de hecho, actualmente está siendo estudiada por varios investigadores. En este contexto, se introduce una nueva propuesta adaptativa basada en el algoritmo de Grover que utiliza el llamado oráculo efectivo, el cual marca todas las soluciones Pareto óptimas de un problema de optimización multiobjetivo.

## INTRODUCCIÓN

La optimización se aplica frecuentemente en disciplinas tan diversas como la ingeniería, la economía, la administración de recursos y procesos, la industria, las políticas gubernamentales, entre otras; principalmente avocada a resolver problemas concernientes a la toma de decisiones respecto a una función objetivo [1], [2].

Desde la década de los 80 del siglo pasado ha surgido una nueva disciplina de estudio, la computación cuántica, nacida a partir de las ideas de Paul Benioff, Richard Feynman, Yuri Manin y otros, quienes explicaran la incapacidad básica de emplear a los computadores clásicos en las simulaciones de ciertos fenómenos cuánticos. Esto motivó la idea de construir computadores más eficientes cuyo funcionamiento se basara en las mismas leyes del mundo cuántico, incorporando fenómenos tales como la superposición, la interferencia y el entrelazamiento cuántico [3].

Un avance considerable surgió con el desarrollo del algoritmo cuántico de búsqueda por Grover [4], con el cual se reduce la complejidad computacional de la búsqueda de un orden de  $O(N)$  para computadores clásicos, a un orden de  $O(\sqrt{N})$  para computadores cuánticos con lo que se obtiene una eficiencia considerable. Fue a partir del algoritmo de búsqueda de Grover que varios investigadores ya han propuesto diversos métodos de aplicar dicho algoritmo a la optimización global de funciones y en general a la búsqueda de una solución óptima. Dürr y Høyer [5], presentaron un algoritmo cuántico basado en el algoritmo de Grover aplicado al problema de búsqueda del mínimo. Por otra parte, Baritomba, Bulger y Wood [6], propusieron un procedimiento computacional basado en el algoritmo de Grover como base para implementar un algoritmo de optimización global adaptativo. Mientras que Barán y Villagra [7], introdujeron el primer algoritmo cuántico para optimización combinatoria multiobjetivo basado en un computador cuántico adiabático.

En el presente trabajo se expone una alternativa de aplicación del algoritmo de Grover basado en un oráculo hipotético que llamaremos oráculo efectivo. Este oráculo efectivo marca todas las soluciones óptimas incluso en un contexto de muchos objetivos contradictorios. De esta manera se propone un nuevo algoritmo aplicado a una búsqueda adaptativa que garantice con alta probabilidad la obtención de una nueva solución óptima en cada búsqueda realizada.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### ALGORITMO DE BÚSQUEDA DE GROVER

A partir de un conjunto de  $N$  elementos, desde el punto de vista de la computación clásica, hallar un elemento específico tomaría en el peor de los casos  $N$  intentos por lo que corresponde a una complejidad  $O(N)$  [8]; siendo esta cota óptima. El algoritmo de búsqueda de Grover permite encontrar un elemento específico de un conjunto de  $N$  elementos con una complejidad  $O(\sqrt{N})$ . Esto es así debido a que se basa en la aplicación iterativa del operador de Grover  $G$ , el cual a su vez se compone conjuntamente de un operador oráculo  $O_G$  y un operador de desplazamiento de fase  $W$ , así como se aprecia en la Figura 1 izquierda.

La cantidad de iteraciones  $r$  necesarias se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$r = \lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \rfloor \approx \sqrt{N}, \quad (1)$$

de allí la complejidad  $O(\sqrt{N})$  [4].

El funcionamiento del algoritmo de Grover se basa en marcar la solución buscada, representada por uno de los estados que componen el estado de superposición. Cabe destacar que el proceso de marcación se basa en el cambio de signo del estado deseado. Esto sucede con cada iteración y es por ello que el algoritmo posibilita una interpretación geométrica relativa a la rotación de todos los estados que no son soluciones hacia el estado solución por cada aplicación del operador de Grover  $WO_G$  (ver Figura 1 derecha) [8].

### PROPUESTA DE ALGORITMO ADAPTATIVO DE GROVER

Tal como fuera explicado en la sección anterior, el algoritmo de Grover nos permite observar con alta probabilidad al momento de la medición cualquiera de los estados soluciones. Por lo tanto, es probable obtener cualquier estado solución en cada búsqueda pudiéndose nuevamente examinar un estado solución ya observado, lo que podría significar una pérdida de tiempo.

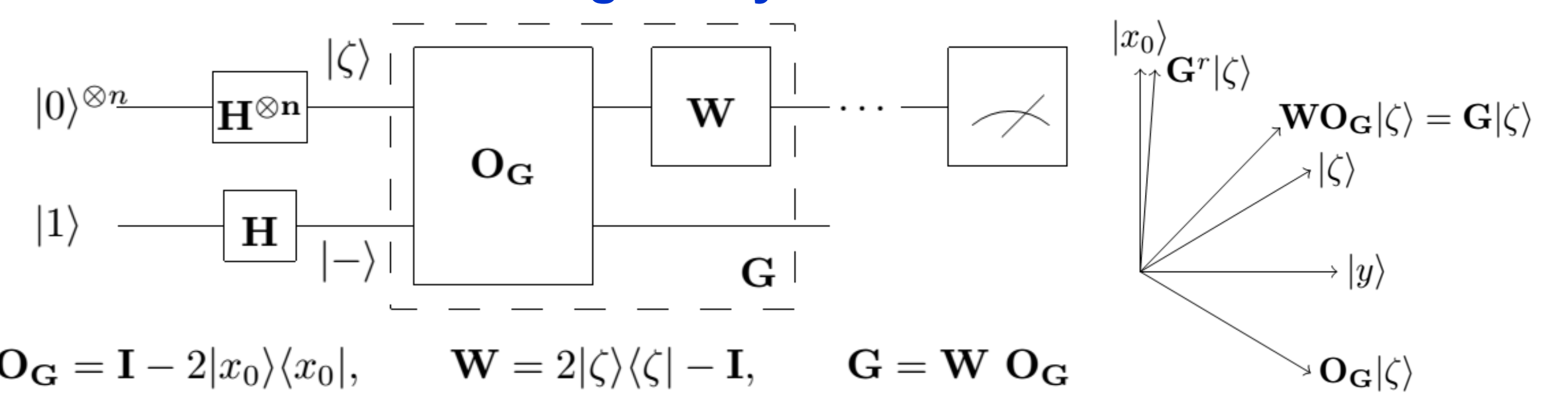
Por ello, se plantea un nuevo algoritmo adaptativo de Grover a fin de observar un estado solución nuevo al final de cada búsqueda realizada. El mencionado algoritmo adaptativo se basa en la utilización de un operador unitario hipotético denominado oráculo efectivo  $O_E$ .

Por lo tanto, dicho oráculo efectivo marca todos los estados soluciones del estado en superposición, para posteriormente aplicar el operador de Grover  $G$ , el cual está constituido por el operador oráculo de Grover  $O_G$  y el operador de desplazamiento de fase  $W$ . Tras las iteraciones requeridas al momento de la medición se observa un nuevo estado solución. Cabe destacar que se requiere un total de  $l$ -búsquedas para un conjunto de  $l$ -soluciones. No obstante, el oráculo de Grover  $O_{Gk}$  presenta una particularidad.

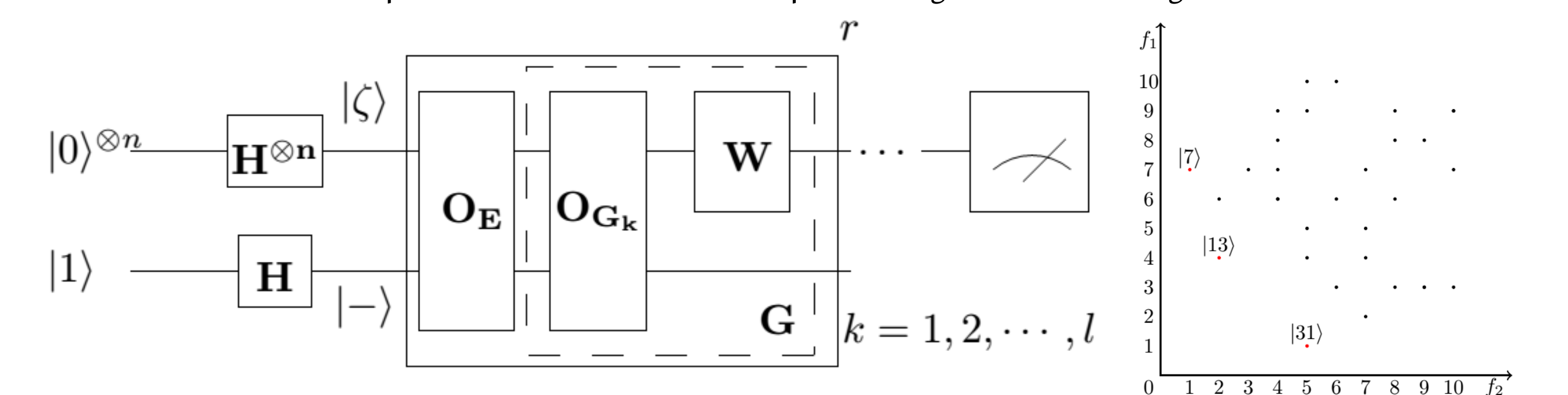
En la primera búsqueda,  $O_{G1}$ , es el equivalente al elemento de identidad  $I$ , debido a que no se ha obtenido aún solución alguna. Y a partir de la segunda búsqueda  $O_{G2}$ , es el equivalente al oráculo de Grover respecto a la solución obtenida en la búsqueda anterior, por lo que desmarca dicho estado solución a fin de no incluirlo en la nueva búsqueda. Esta manera de desmarcación es posible debido a que el oráculo de Grover  $O_{Gk}$  se aplica posteriormente al oráculo efectivo  $O_E$ .

Cambiando nuevamente el signo de aquellas soluciones ya encontradas, que en cada búsqueda siempre son marcadas por el oráculo efectivo  $O_E$ . De este modo, en las sucesivas  $k$ -búsquedas el oráculo de Grover  $O_{Gk}$  desmarca las soluciones previamente encontradas y con ello se asegura una alta probabilidad en la observación de una nueva solución (ver Figura 2 izquierda).

## Figuras y Tablas



**Figura 1.** A la izquierda, Algoritmo de Grover en el contexto de los circuitos cuánticos y el equivalente en notación de Dirac de los operadores. A la derecha, interpretación geométrica del algoritmo de Grover.



**Figura 2.** A la izquierda, algoritmo adaptativo de Grover basado en un oráculo efectivo  $O_E$  para la búsqueda de  $l$ -soluciones. A la derecha, presentación de las soluciones óptimas (en rojo) y sub-óptimas (en negro) conforme a las asignaciones al azar de las funciones biobjetivo.

Búsqueda	$r$	$P_{ 7\rangle}$	$P_{ 13\rangle}$	$P_{ 31\rangle}$	$P_{ x\rangle} \neq \{7,13,31\}$
1ra.	2	33.33%	33.33%	33.33%	0.0008%
2da.	3	0.13%	48.07%	48.07%	0.13%
3ra.	4	0.0026%	0.0026%	99.92%	0.0026%
4ta.	4	3.125%	3.125%	3.125%	3.125%

**Tabla 1.** Resultados obtenidos respecto al ejemplo de la figura 2 derecha, con las búsquedas de comprobación.

## RESULTADOS

Ahora bien, de manera a comprobar la efectividad del algoritmo adaptativo propuesto, se ha simulado una búsqueda para  $N = 32$  (correspondiente a 5 qubits) con tres estados soluciones,  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ . Los mismos fueron determinados a partir de la función biobjetivo relacionada con cada estado, cuyos componentes han sido asignados con valores al azar del intervalo de los números naturales [1, 10], tanto para la función  $f_1$  como para  $f_2$  (ver figura 2 derecha). En la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos en cada búsqueda a partir del estado en superposición resultante conforme se van obteniendo las soluciones óptimas. Suponemos arbitrariamente el siguiente orden: primero  $|7\rangle$ , luego  $|13\rangle$  y por último  $|31\rangle$ . Al final de cada búsqueda todas las soluciones óptimas son igualmente probables de ser observadas y una vez encontrados todos los estados soluciones todos los estados que conforman el estado en superposición son igualmente probables de ser observados. Por lo tanto podría observarse un estado no solución y con ello se concluirían las búsquedas.

## CONCLUSIONES

El nuevo algoritmo adaptativo de Grover propuesto resulta no solo factible, sino más efectivo respecto al algoritmo de búsqueda de Grover con relación a su aplicación a problemas de optimización multiobjetivo. Esto es debido a que con cada proceso de búsqueda realizada, se garantiza con alta probabilidad la observación de una nueva solución óptima. Por lo tanto, el proceso de búsqueda concluye al momento de encontrar una solución sub-óptima. Los resultados experimentales comprueban que el empleo de un hipotético oráculo efectivo  $O_E$  conjuntamente con el oráculo de Grover  $O_G$  posibilita la exclusión de las soluciones previamente encontradas con respecto al nuevo proceso de búsqueda. Cabe destacarse que el oráculo de Grover  $O_G$  específicamente se ajusta para desmarcar las soluciones previamente obtenidas y esto, se realiza en cada proceso de búsqueda.

## REFERENCIAS

- [1] Rao, S.S. and Rao, S.S., Engineering optimization: theory and practice, John Wiley & Sons, 2009.
- [2] Hillier, F. S. L., Hillier, G. J. F. S. and Lieberman, G. J., Introducción a la Investigación de Operaciones McGraw-Hill, 1989.
- [3] Rieffel, E. and Polak, W., An introduction to quantum computing for non-physicists, ACM Computing surveys, 32(3), 300-335, 2000.
- [4] Grover, L. K., A fast quantum mechanical algorithm for database search, In Proceedings of the twenty eighth annual ACM symposium on Theory of computing (pp.212-219), ACM, 1996.
- [5] Dürr, C. and Høyer, P., A quantum algorithm for finding the minimum, arXiv preprint quant-ph/9607014, 1996.
- [6] Baritomba, W. P., Bulger, D. W., and Wood, G. R., Grover's quantum algorithm applied to global optimization, SIAM Journal on Optimization, 15(4), 1170-1184, 2005.
- [7] Barán, B. and Villagra, M., Multiobjective Optimization in a Quantum Adiabatic Computer, Symposium on Theory of Computation (SLTC) CLEI 2016, Valparaiso-Chile, 2016.
- [8] Nielsen, M. A. and Chuang, I. L., Quantum computation and quantum information, Cambridge university press, 2010.